Travaux Dirigés : Electrostatique

SMPC : PHY02

Département de Physique
Faculté des Sciences de Tétouan

01-03-2010

Série n° 1

Exercice 1 : On considère deux charges électriques ponctuelles *q* et *-4q*, distantes de *a*. *q étant positif*.

a. Déterminer le champ $\vec{E}$ en un point *M* tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. Dessiner les champs créés par chacune des charges et le champ résultant.

b. Déterminer la valeur de *x* négatif pour laquelle $\vec{E} = \vec{0}$. Donner la valeur du potentiel électrique *V* en ce point.

Exercice 2 : On considère une boucle de rayon *R* portant une charge électrique de densité linéique uniforme λ. Soit M un point de l'axe de la boucle d'abscisse *z*.

a. Déterminer directement :
   - le champ électrique $\vec{E}(z)$
   - le potentiel $V(z)$ (on prendra $V = 0$ pour z infini).

b. Retrouver l'expression du champ électrique à partir de celle du potentiel.

Exercice 3 : Effectuer le calcul du champ électrostatique $\vec{E}$ crée par un disque de rayon *R* portant la charge surfacique $\sigma = cte$, en un point de son axe $(O;\vec{k})$. Tracer *E(z)* en fonction de *z*. $\overrightarrow{OM} = z\vec{k}$. En faisant tendre *R* vers l'infini, en déduire le champ créé par un plan (infini) de charges.

Exercice 4 : On considère une demi-droite $(A;\vec{j})$ portant une densité linéique de charges uniforme λ. Déterminer le champ en M. Avec $\overrightarrow{OA} = a\vec{j}$; $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. $(O;\vec{i},\vec{j})$ étant un repère orthonormé.

Exercice 5 : Par application du théorème de Gauss, déterminer le champ en tout point M de l'espace dans les cas suivants :

1. une sphère de centre *O* de rayon *R* portant une densité surfacique de charges uniforme σ.
2. une sphère de centre **O** de rayon *R* portant une densité volumique de charges uniforme ρ.
3. une distribution de charges à symétrie sphérique centrée en *O* telle qu'à une distance *r* de *O*, $\rho = \rho_0 e^{-kr}$.
4. un cylindre de longueur infinie, de rayon R, portant une densité surfacique uniforme σ.
5. un cylindre de longueur infinie, de rayon R, portant une densité volumique de charges r uniforme ρ.

Exercice 6 : On considère deux sphères conductrices, l'une notée S_1, pleine et portant une charge Q_1 négative. L'autre, S_2, creuse et ne portant aucune charge.

a. Donner la répartition des charges sur S_2, lorsqu'on place S_1 à l'intérieur de S_2.
b. Donner la nouvelle répartition des charges lorsqu'on établi un contact électrique entre les deux sphères.
c. En plus du contact électrique entre S_1 et S_2, on relie S_2 au sol. Quelle est alors, la nouvelle répartition des charges?

Exercice 7 : On considère deux sphères *S* et *S'* de rayons *R* et *R'* portant des charges respectives *Q* et *Q'* et reliées par un fil conducteur dont on néglige la charge. Les deux sphères sont supposées suffisamment éloignées pour que leurs charges restent uniformes.

a. Etablir une relation entre les champs *E* et *E'*, au voisinage de chaque sphère, et leurs rayons. Ce résultat est-il prévisible?
b. Examiner le cas particulier où *S* représente le globe terrestre (*R=6400km*).

Exercice 8 : Calculer la capacité d'un condensateur dont l'armature interne est un cylindre d'axe Δ, de rayon R_1 et dont la surface interne de l'armature externe est un cylindre de même axe Δ et de rayon R_2 (condensateur cylindrique). On calculera la capacité pour une longueur *h* du condensateur.

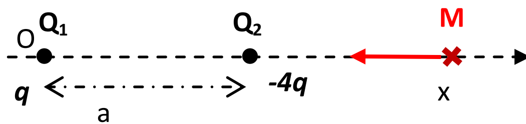
Calculer le cas où R_1 et R_2 sont peu différents. On supposera $R_2 = R_1 + e$, avec $e \ll R_1$ et R_2.

Série n° 1 : Corrigé

Exercice 1 :

a/ Selon la position relative du point M, on distingue 3 cas :

1er cas : $a < x$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{x^2} - \frac{4q}{(x-a)^2}\right)\vec{i}$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x+a)(3x-a)}{x^2(x-a)^2}\vec{i} = E(x)\vec{i}$$

Comme $x > a$, on s'aperçoit que $E(x) < 0$

2eme cas : $0 < x < a$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{x^2} - \frac{4q}{(a-x)^2}\right)\vec{i}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x+a)(a-3x)}{x^2(x-a)^2}\vec{i} = E(x)\vec{i}$$

Dans ce cas, *E(x)* peut être :

positif ($x < \frac{a}{3}$), négatif ($x > \frac{a}{3}$) ou nul ($x = \frac{a}{3}$)

3eme cas : $x < 0$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{x^2} - \frac{4q}{(a+|x|)^2}\right)\vec{i}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x+a)(a-3x)}{x^2(x-a)^2}\vec{i} = E(x)\vec{i}$$

Comme $0 > x$, on a $a - 3x > 0$

Dans ce cas, *E(x)* peut être :

positif ($x > -a$), négatif ($x < -a$) ou nul ($x = -a$)

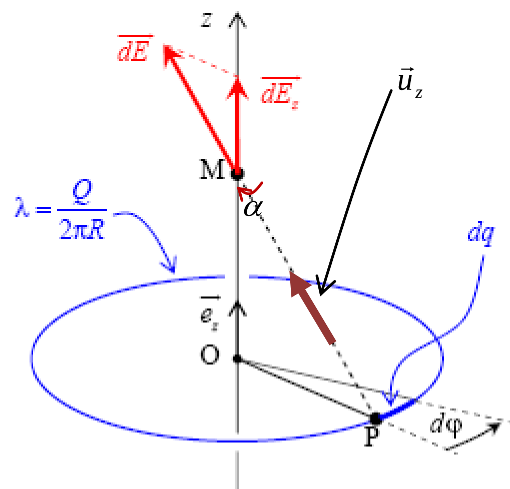
b/ $E(-a) = 0$

$$V(-a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a} - \frac{4q}{2a}\right) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Exercice 2 :

<u>Calcul direct du champ :</u>

La symétrie du problème impose que : $d\vec{E} \,//\, \vec{z}$



Le champ créé en M par une longueur infinitésimale de longueur R$d\varphi$ au point P de coordonnées polaires (R, φ) vaut : $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\varphi}{r^2}\vec{u}_z$

Avec : $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. En réalité, la seule composante utile de $d\vec{E}$ est la composante suivant $\vec{z}$, comme le champ final $\vec{E}$ est suivant $\vec{z}$.

On projette $d\vec{E}$ sur l'axe (O, z) :

$$dE = dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\varphi}{r^2}\cos\alpha$$

Le champ total est : $E(z) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_{boucle}\frac{\cos\alpha}{r^2}d\varphi = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{r^2}\int_0^{2\pi}d\varphi$

car α et r sont constants lorsque le point P décrit la boucle. Soit, $E(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{r^2}$

En revenant aux données de l'exercice : $E(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$

Exercice 3 : On calcule le champ par la méthode directe pour un point M de cote z positive :

Remarque : E(z) = -E(-z) (à cause de la symétrie)

<u>Calcul direct du potentiel :</u>

On applique la définition :

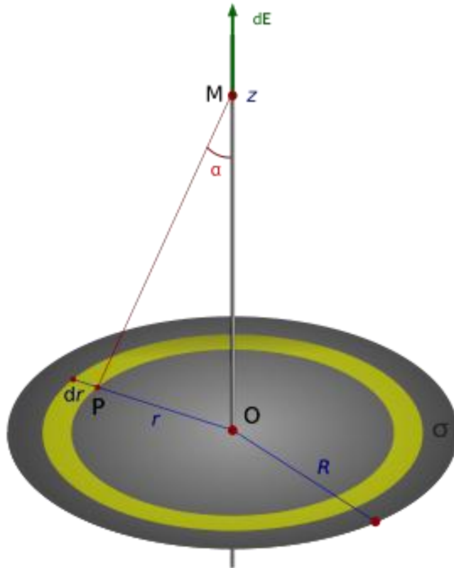
On suppose que l'origine des potentiels est à l'infini.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{boucle}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{boucle}\frac{\lambda R d\varphi}{r} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{2\pi}d\varphi$$

Soit finalement : $V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2 + R^2}}$

On peut retrouver ce résultat à partir de la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. Comme E ne dépend que de z, il vient : $E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z}$, soit en dérivant l'expression de E(z) :

$$E(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$



- Tout plan contenant (Oz) est plan de symétrie de la distribution, donc pour tout point M de (Oz), $\vec{E}(M)$ est suivant $\vec{z}$
- On utilise comme surface élémentaire une **couronne élémentaire** de *rayon r*, d'*épaisseur dr*. Cette couronne est vue sous un angle α depuis le point M. On intégrera suivant α pour « balayer » toute la surface de la couronne.
- La surface de cette couronne élémentaire est $\mathrm{d}S = 2\pi r.\mathrm{d}r$. Le champ créé en M par cette couronne élémentaire est donc $\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\cos(\alpha)\ \vec{u}_z = \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0 PM^2}\cos$
- Comme on veut intégrer suivant α, on va chercher à tout exprimer en fonction de α et *z* :
  - $r = z.\tan(\alpha)$ donc $\mathrm{d}r = \frac{z.\mathrm{d}\alpha}{\cos^2(\alpha)}$
  - $PM = \frac{z}{\cos(\alpha)}$
- On obtient finalement $\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z\tan(\alpha)\frac{z.\mathrm{d}\alpha}{\cos^2(\alpha)}\frac{\cos^2(\alpha)}{z^2}\cos(\alpha)\ \vec{u}_z$, ce qui après simplification donne $\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha\ \vec{u}_z$
- On intègre pour α entre 0 et α_{max} : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\alpha_{max}}\sin(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha\ \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos(\alpha_{max}))\vec{u}_z$
- On revient aux données du problème : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{u}_z$
- La symétrie de la distribution par rapport au plan du disque assure $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$
- On peut considérer que le plan est un disque de rayon infini : $\lim\limits_{R\to\infty}\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$

Exercice 5 : 1. **<u>Sphère chargée en surface avec,</u>** $\sigma = cte$

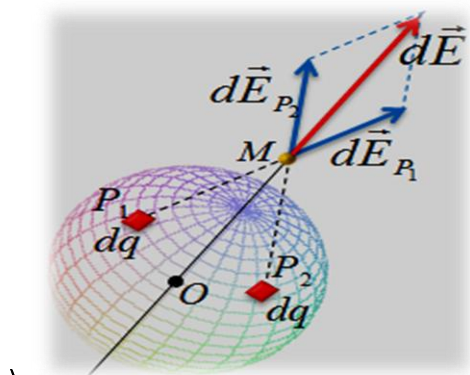
Fait lors de la séance du cours.

2. **Sphère chargée en volume avec, $\rho = cte$**

Pour déterminer le champ, on suit les étapes suivantes :

-Direction de E :

La symétrie sphérique (sphère, $\rho = cte$) fait que la direction de $\vec{E}$ est parallèle au vecteur $\vec{e}_r$ ($\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$



).

$\vec{E}$ ne dépend que de r et de $\vec{e}_r$. Soit, $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. On dit que le champ est radial.

Choix de la surface de Gauss :

Comme il s'agit d'une symétrie sphérique, on choisit comme surface de Gauss la sphère de centre O et de rayon r.

Calcul de flux et de Q_{int}

$$\phi = \int_{S.G} \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \int_{S.G} E(r)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS$$
$$\phi = \int_{S.G} E(r)dS = E(r)\int_{S.G} dS .$$

Soit: $\phi = 4\pi r^2 E(r)$

Pour calculer Q_{int}, il faut se rappeler qu'il correspond à la charge se trouvant à l'intérieur de la surface de Gauss. Alors, il y'a deux cas possibles :

r > R : A ce cas, correspond la charge entière de la distribution : $Q_{int} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

r < R : A ce cas, correspond uniquement la portion de charge $Q_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

Déduction de l'expression du champ :

Le théorème de Gauss veut que : $\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$, alors on peut déduire :

$$\begin{cases} E(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, & r \geq R \\ E(r) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}, & r \leq R \end{cases}$$

3. **Distribution sphérique chargée en volume avec $\rho = \rho_0 e^{-kr}$**

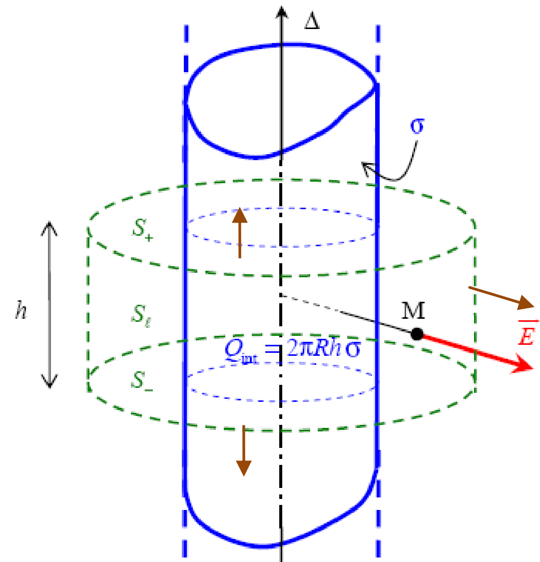
Dans cette question, on suit le même raisonnement qu'en 2. , sauf que pour calculer Q_{int}, on tient compte du fait que ρ dépend de r.

r > R : $Q_{int} = \int_{distributionG} \rho(r) d\tau$

$$Q_{int} = \int_{Distribution} \rho_0 e^{-kr} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

$$Q_{int} = \rho_0 \int_0^R e^{-kr} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q_{\text{int}} = \rho_0 \frac{4\pi}{k^3}[2\text{-}(2+2kR+k^2R^2)e^{-kR}]$$



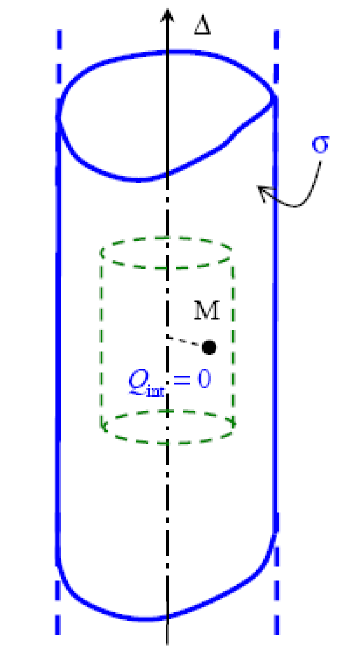
<u>r < R :</u> $Q_{\text{int}} = \int_{volumeSG} \rho(r)d\tau$

$$Q_{\text{int}} = \rho_0 \frac{4\pi}{k^3}[2\text{-}(2+2kr+k^2r^2)e^{-kr}]$$

D'où l'expression du champ :

$$\begin{cases} E(r) = \dfrac{\rho_0[2\text{-}(2+2kR+k^2R^2)e^{-kR}]}{\varepsilon_0 k^3 r^2}, \ r \geq R \\ E(r) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^3 r^2}[2\text{-}(2+2kr+k^2r^2)e^{-kr}], \ r \leq R \end{cases}$$

4. **<u>Cylindre chargé en surface avec, $\sigma = cte$</u>**



-<u>Direction de E :</u>

La symétrie cylindrique (cylindre de longueur infinie, $\sigma = cte$) fait que la direction de $\vec{E}$ est parallèle au vecteur $\vec{e}_r$ (vecteur de la base cylindrique $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$). On dit que $\vec{E}$ est radial et ne dépend que de *r* et de $\vec{e}_r$, soit : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

<u>Choix de la surface de Gauss :</u>

Comme il s'agit d'une symétrie cylindrique, on choisit comme surface de Gauss le cylindre d'axe Δ, de rayon r (r étant la distance de M à l'axe Δ) et de hauteur h.

<u>Calcul de flux et de Q_{int}</u>

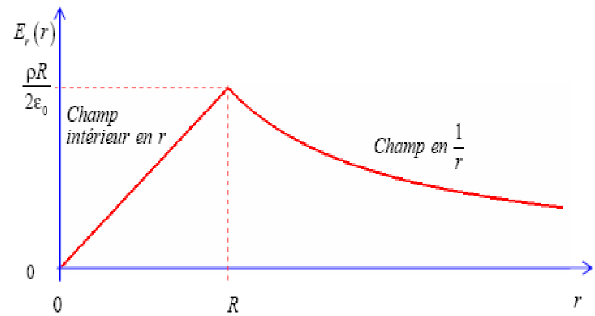
$$\phi = \int_{S.G} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

$$\phi = \int_{b-} E(r)\vec{e}_r \cdot \vec{b}dS + \int_{b+} E(r)\vec{e}_r \cdot \vec{c}dS + \int_{laterale} E(r)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS$$

$$\phi = 0 + 0 + \int_{base} E(r)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS$$

$$\phi = \int_{laterale} E(r)dS = E(r)\int_{laterale} dS$$

$$\underline{\phi = E(r)2\pi rh}$$

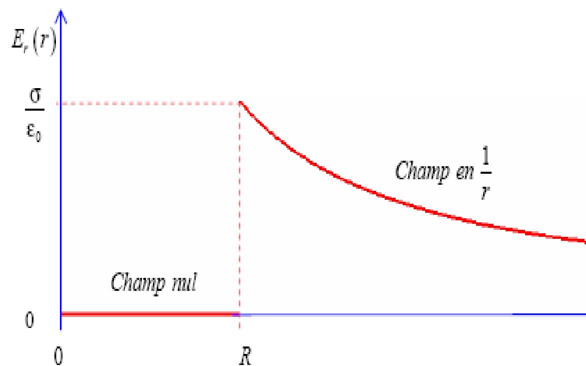


r < R : Lorsque M est à l'intérieur de la distribution : $Q_{int}=0$

r > R : Lorsque est à l'extérieur de la distribution, il correspond la charge entière de la distribution, soit : $Q_{\text{int}} = 2\pi Rh\sigma$

Déduction de l'expression du champ :

$$\begin{cases} E(r) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}, \ r \geq R \\ E(r) = 0, \ r \leq R \end{cases}$$



---

5. **Cylindre chargé en volume avec, $\rho = cte$**

Dans ce cas, on suit le même calcul que le cas du cylindre chargé en surface. Seulement le calcul de Q_{int} change.

r < R : $Q_{\text{int}} = \pi r^2 h\rho$

r > R : $Q_{\text{int}} = \pi R^2 h\rho$.

Soit pour le champ,

$$\begin{cases} E(r) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}, \ r \geq R \\ E(r) = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}, \ r \leq R \end{cases}$$